Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: ***магістр***

на тему ***«Коректність та параболічність крайової задачі для систем диференціальних рівнянь у частинних похідних»***

Виконала: студентка групи МП62
VI курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 113
"Прикладна математика"
освітньо-професійної програми
"Прикладна математика"
Чернікова А.В.
Керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
прикладної математики
Макаров О.А.
Рецензент: доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри
прикладної математики
Фардигола Л.В.

Харків — 2023 рік

Анотації

Чернікова А.В. Коректність та параболічність крайової задачі для систем диференціальних рівнянь у частинних похідних.

В дипломній роботі досліджується крайова двоточкова задача для систем диференціальних рівнянь другого порядку. З'ясовано умови для матриці системи при яких існують коректні крайові задачі в просторах Л. Шварца, а також додаткові умови при яких ці задачі будуть параболічні.

Доведено, що для систем з однією просторовою змінною завжди існує коректна крайова задача.

Аналогічні результати мають місце для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку за часом.

Chernikova I.V. Well-posedness and parabolicity of a boundary-value problem for systems of partial differential equations.

The thesis investigates the two-point boundary value problem for systems of second-order differential equations. Conditions for the matrix of the system have been identified under which well-posed boundary value problems exist in the spaces of L. Schwartz. Additionally, conditions have been determined under which these problems will be parabolic.

It is proved that there is always a well-posed boundary value problem for systems with one spatial variable.

Similar results hold for linear differential equations of the second order in time.

Зміст

Вступ

Крайова двоточкова задача для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних має важливу роль, як у самій математиці, так і в фізиці й інших застосуваннях (див [1]). Ця задача неодноразово досліджувалась харківськими математиками Борок В.М., Макаровим О.А., Фардиголою Л.В. (див [3]-[6]). Ними були отримані класи єдиності та умови коректності в класах функцій степеневого та експоненціального зростання.

В цій дипломній роботі досліджуються випадки систем, для яких існує коректна двоточкова крайова задача в просторі Л. Шварца, а також при яких умовах ця задача буде параболічною, тобто збільшується гладкість розв'язків. Доведене, що якщо власні значення матриці системи зростають степеневим чином, то існують параболічні крайові задачі.

Аналогічні результати вірні також для лінійних диференціальних рівнянь в частиних похідних другого порядку за часом.

Показано, що існує параболічна крайова задача для рівняння Гелмгольця. Детально розглянений випадок рівняння другого порядку з однією просторовою змінною і вказані умови існування параболічної крайовиої задачі.

1. Постановка задачі

Розглянемо наступну крайову задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right) u(x,t), & (1) \\ Au(x,0) + Bu(x,T) = \varphi(x) & (2) \end{cases}$$

де $x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T], P\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)$ – квадратна матриця, елементами якої є диференціальні оператори зі сталими коефіцієнтами, і постійні квадратні матриціA і B.

Означення 0.1. Задача (1)-(2) називається коректно розв'язною з простору Φ_1 у простір Φ_2, якщо $\forall \varphi(x) \in \Phi_1 \exists!$ розв'язок $u(x,t) \in \Phi_2 (\forall t \in [0,T])$ і цей розв'язок неперервно залежить від $\varphi(x)$ у топології відповідних просторів.

У якості просторів Φ_1 і Φ_2 будемо розглядати простір Л. Шварца $S = \bigcap\limits_{s,l} C_l^s$, що складається з нескінченно диференційовних функцій, що спадають швидше ніж будь-який степінь.

Важливу роль в коректності задачі (1)-(2) грає визначник крайової задачі:

$$\Delta(s) = \det\left(A + Be^{TP(s)}\right)$$

і розв'язуюча матриця $Q = e^{tP(s)}\left(A + Be^{TP(s)}\right)^{-1}$

Критерій коректності крайової задачі в просторі S — це критерій, що задовільняє степеневу оцінку:

$$\exists\, p \geq 0, \exists\, C > 0 \quad ||Q(s,t)|| \leq C(1+|s|)^{p} \quad \forall s \in \mathbb{R}^n$$

.

Означення 0.2. Задача (1)-(2) називається параболічною, якщо $Q(s,t) = e^{tP(s)}\left(A + Be^{TP(s)}\right)^{-1}$ задовільняє оцінку $||Q(s,t)|| \leq C(1 + |s|)^p exp(-b\rho(t)|s|^h)$ з деякими додатними C, p, h, де $\rho(t) = min\{t, T-t\}$.

В роботі [6] доведено, що коректна крайова задача буде параболічною, якщо власні значення матриці $P(s)$ задовільняють умові $\min\limits_j |Re\lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$, при деяких C, h та $b \in \mathbb{R}$.

З'ясуємо, для яких систем (1) існують коректні крайові задачі з крайовими умовами (2) і в яких випадках ці задачі будуть параболічними.

2. Випадок ермітової матриці

Розглянемо випадок, коли матриця

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} - \text{ермітова},$$

тобто $P_{ij} = \overline{P}_{ji}$ - комплексно спряжені.

Теорема 1. Якщо матриця P(s) — ермітова, то крайова задача з умовою

$$u(x,0) + u(x,T) = \varphi(x) \tag{3}$$

коректна у просторі S.

Доведення.

Так як власні значення ермітової матриці дійсні, то визначник крайової задачі $\Delta(s) = (1 + e^{T\lambda_1(s)})(1 + e^{T\lambda_2(s)}) \neq 0$.

Покажемо, що розв'язуюча матриця $Q(s,t) = e^{tP(s)}(E + e^{TP(s)})^{-1}$ задовільняє степеневій оцінці. Розглянемо функцію $f(\lambda) = e^{t\lambda}(1 + e^{T\lambda})^{-1}$. Вона визначена та обмежена на дійсній осі.

Тому $Q(s,t) = f(P(\lambda))$ також визначена та задовільняє степеневій оцінці $||Q(s,t)|| \leq C(1+|s|)^p$ (див. [5]).

Тому крайова задача (1) - (3) коректна в просторі S, а також в просторі C_l^s.

Приклад 1. Розглянемо матрицю $P(s) = \begin{pmatrix} s^2 & is \\ -is & -s^2 \end{pmatrix}$. Це ермітова матриця, власні значення якої $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{s^4+s^2}$. Тоді крайова задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1(x,0) + u_1(x,T) = \varphi_1(x) \\ \\ u_2(x,0) + u_2(x,T) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

коректна у просторі S, а також в просторі C_l^s.

Теорема 2. Якщо власні значення ермітової матриці $P(s)$ задовільняють умові $|\lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ із деякими додатними C, h і дійсним b, то крайова задача (1) - (3) буде параболічною. Це означає що, якщо $\varphi(x) \in C_l^s$, то $u(x,t) \in C_{l_2}^{\infty}$, тобто будуть нескінченно диференційовними по x.

Доведення.

Це випливає з твердження, що було наведено в пункті 1.

Зауваження.

За теоремою 2, задача, що розглядається в прикладі 1, є параболічною.

3. Випадок загальної матриці

Розглянемо довільну поліноміальну матрицю P(s).

Теорема 3. Якщо існує дійсне число α таке, що на множинах $N_j = \{s \in \mathbb{R}^n : Re\lambda_j(s) = \alpha\}$ $j = 1, 2$ виконується нерівність $Im\lambda_j(s) \neq \frac{(2k+1)\pi}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$, то при $b = e^{\alpha T}$ крайова задача для системи (1) з умовою $u(x, 0) + bu(x, T) = \varphi$ коректна в просторі S.

Доведення.

Так як визначник крайової задачі $\Delta(s) = (1 + e^{T(\lambda_1(s)-\alpha)})(1 + e^{T(\lambda_2(s)-\alpha)})$, то він обертається у 0 при $\lambda_j = \alpha + \frac{(2k+1)\pi i}{T}$ з деяким j. Це рівносильно умові

$$\begin{cases} Re\lambda_j(s) = \alpha \\ \\ Im\lambda_j(s) = \dfrac{(2k+1)\pi}{T}. \end{cases}$$

з деякими s.

Але у силу умови теореми, це не виконується.

Доведемо тепер, що розв'зуюча матриця $Q(s, t) = e^{tP(s)}(1 + be^{TP(s)})^{-1}$. Вона визначена на спектрі матриць P(s),так як $\Delta(s) \neq 0$.

Якщо $Re\lambda < \alpha$, то $|f(\lambda)| = |e^{t\lambda}(1 + e^{T(\lambda-\alpha)})^{-1}| < C_1$, так як $|e^{t\lambda}| = e^{tRe(\lambda)} \leq e^{T\alpha}$

Якщо $Re\lambda > \alpha$, то $|f(\lambda)| = |e^{(t-T)(Re(\lambda)-\alpha)}(1 + e^{-T(\lambda-\alpha)})^{-1}| < C_2$, так як $e^{(t-T)(Re(\lambda)-\alpha)} \leq 1$.

Тому значення функції $f(\lambda)$ на спектрі матриці P(s) обмежені, а це означає, що й $||Q(s, t)|| \leq C(1 + |s|)^p$, так як

$$f(P(s)) = \frac{f(\lambda_1(s))}{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)}(P(s) - \lambda_2(s)E) + \frac{f(\lambda_2(s))}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}(P(s) - \lambda_1(s)E)$$

при $\lambda_2(s) \neq \lambda_1(s)$.

Якщо $\lambda_2(s) = \lambda_1(s)$, то $f(P(s)) = f(\lambda_1(s))E + f'(\lambda_1(s))(P(s) - \lambda_1(s)E)$

Отже, крайова задача коректна у просторі S, а також із простору $C_{l_1}^{s_1}$ в простір $C_{l_2}^{s_2}$ з деякими s_j, l_j. (див [8])

Приклад 2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x_1,x_2,t)}{\partial t} = u_1(x_1,x_2,t) + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \\ \\ \dfrac{\partial u_2(x_1,x_2,t)}{\partial t} = u_1(x_1,x_2,t) + u_2(x_1,x_2,t). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 1 & -s_1^2 + s_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Характеристичне рівняння $(\lambda - 1)^2 + s_1^2 - s_2^2 = 0$, а власні значення $\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{s_2^2 - s_1^2}$.

Це означає, що $\lambda_{1,2}(s) = \begin{cases} 1 \pm \sqrt{s_2^2 - s_1^2}, & \text{при } |s_2| \geq |s_1| \\ 1 \pm i\sqrt{s_1^2 - s_2^2}, & \text{при } |s_2| < |s_1|. \end{cases}$

Тоді при $\forall \alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1$ виконуються умови теореми 3, а це означає, що відповідна крайова задача коректна в просторі S.

Теорема 4. Якщо власні значення матриці $P(s)$ задовільняють умові $\min\limits_j |Re\lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ з деякими додатними C, h і дійсним b, то існує параболічна задача.

Доведення.

Покажемо, що з умов теореми 4 випливає виконання умов Теореми 3.

Із умов Теореми 4 випливає, що $\exists\ r > 0 \ \ \forall s : |s| > r \Rightarrow |Re\lambda_j(s)| \geq m > 0$.

Тоді множина $G_k = \{s \in \bar{U}_r(0) : Im\lambda_j(s) = \dfrac{(2k+1)\pi}{T}\}$ є компакт такий, що $dim G_k \leq n$

Тоді $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} G_k < \bar{U}_r(0)$, а значить існує $s_0 : Re\lambda_j(s_0) \neq \alpha$ такий, що $Im\lambda_j(s_0) \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{T}\}$, тобто виконана умова Теореми 3. Таким чином коректна крайова задача з умови (1.4), яка буде параболічною.

Теорема доведена.

Зауваження. В прикладі 2 крайова задача була коректною, але не параболічною. Наведемо приклад параболічної задачі.

Приклад 3.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_1(x,t) - \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x_2^2} \\ \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = u_1(x,t) + u_2(x,t). \end{cases}$$

Матриця $P(s) = \begin{pmatrix} 1 & s_1^2 + s_2^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Власні значення цієї матриці $\lambda_{1,2}(s) = 1 \pm \sqrt{s_2^2 + s_1^2}$

Вони задовільняють умовам Теореми 4 і тому крайова задача з крайовими умовами

$$\begin{cases} u_1(x,0) + bu_1(x,T) = \varphi_1(x), \\ \\ u_2(x,0) + bu_2(x,T) = \varphi_2(x), \end{cases}$$

при будь-яких додатних b, буде параболічною.

4. Система з однією просторовою змінною

Розглянемо системи з однією просторовою змінною, тобто $x \in \mathbb{R}$. Тоді з Теореми 3 випливає наступний результат.

Наслідок 1. Для системи (1) у випадку $x \in \mathbb{R}$ завжди існує коректна крайова задача в просторі S.

Доведення.

Якщо власні числа матриці $P(s)$ дійсні, то $Im\lambda_j(s) = 0$ і виконуються умови Теореми 3, тобто $Im\lambda_j(s) \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{T}$, і це означає, що крайова задача з умовою $u(x,0) + bu(x,T) = \varphi$ з будь-якими $b > 0$ буде коректна в просторі S.

Якщо $Im\lambda_j(s) \not\equiv 0$, то рівняння $\lambda_j(s) - \alpha = \dfrac{(2k+1)\pi i}{T}$ рівносильно умові

$$\begin{cases} Re\lambda_j(s) = \alpha \\ \\ Im\lambda_j(s) = \dfrac{(2k+1)\pi}{T}. \end{cases}$$

Друге рівняння при фіксованому k має скінченну кількість коренів, а при $k \in \mathbb{Z}$ таких коренів — зліченна множина s_k. Тоді множина значень $Re\lambda_j(s_k) \neq \alpha$. Отже, виконується умова Теореми 3 й існує коректна крайова задача з умовою $u(x,0) + e^{-\alpha T}u(x,T) = \varphi(x)$.

Наслідок 2. Якщо умова $|Re\lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ виконується, з додатними C і h, то існує параболічна крайова задача.

Приклад 4.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_2(x,t) \\ \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u_1^2(x,t)}{\partial x^2} + k^2 u_1^2(x,t) \end{cases}$$

Матриця$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-s^2+k^2) & 0 \end{pmatrix}$, її власні числа $\lambda_{1,2}(s) = \pm\sqrt{s^2 - k^2}$.

При$|s| \geq k$ $\lambda_j(s)$ дійсні, а при $|s| < k$ корені уявні $\lambda_j(s) = \pm i\sqrt{k^2 - s^2}$.

Тому крайова задача з умовою

$$\begin{cases} u_1(x,0) + bu_1(x,T) = \varphi_1(x), \\ \\ u_2(x,0) + bu_2(x,T) = \varphi_2(x), \end{cases}$$

з $b \in (0; 1)$ буде параболічною.

5. Крайова задача для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку за часом

Застосуємо отримані результати до рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + R\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) = 0. \tag{4}$$

Це рівняння зводиться до системи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = u_2(x,t) \\ \\ \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = -Q\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u_1(x,t) - R\left(\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)u_2(x,t). \end{cases}$$

Тоді матриця

$$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(s) & -R(s) \end{pmatrix},$$

а характеристичне рівняння для неї $\lambda^2 + R(s)\lambda + Q(s) = 0$. Позначимо корені цього рівняння $\lambda_{1,2}(s)$ Тоді, з теореми 3 випливає результат:

Наслідок 3. Якщо існує дійсне число α, таке що на множині $N_j = \{s \in \mathbb{R}^n : Re\lambda_j(s) = \alpha\}$ $\; j = 1, 2$ виконується нерівність $Im\lambda_j(s) \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{T}$

при $k \in \mathbb{Z}$, то при $b = e^{-\alpha T}$крайова задача для рівняння (4) з умовою

$$\begin{cases} u(x,0) + bu(x,T) = \varphi_1(x) \\ \\ u_t'(x,0) + bu_t'(x,T) = \varphi_2(x) \end{cases} \tag{5}$$

буде коректна у просторі S.

Наслідок 4. Якщо $\min\limits_j |Re\lambda_j(s)| \geq C|s|^h - b$ з додатними C і h і дійсним b, тоді крайова задача для рівнянь (4) з крайовими умовами (5) буде параболічною.

В якості приклада розглянемо рівняння Гелмгольця:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \Delta u(x,t) = ku(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T], k \in \mathbb{R}$$

Крайова умова (5) з $b > 0$.

Після перетворення Фур'є за просторовими змінними отримаємо крайову задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}(s,t)}{\partial t^2} - |s|^2 \Delta \widetilde{u}(s,t) = k\widetilde{u}(s,t), \\ \\ \widetilde{u}(s,0) + b\widetilde{u}(s,T) = \widetilde{\varphi_1}(s), \\ \\ \widetilde{u}_t'(s,0) + b\widetilde{u}_t'(s,T) = \widetilde{\varphi_2}(s) \end{cases}$$

Розв'язок має вигляд $\widetilde{u}(s,t) = C_1(s)e^{\lambda(s)t} + C_2(s)e^{-\lambda(s)t}$, де $\lambda(s) = \sqrt{k + |s|^2}$. Враховуючі крайові умови, знайдемо розв'язок крайової задачі:

$$\widetilde{u}(s,t) = \frac{1}{(1+be^{\lambda T})(1+be^{-\lambda T})}\Bigg((ch\lambda t + bch\lambda(T-t))\widetilde{\varphi_1}(s) + \\ + (\frac{sh\lambda t}{\lambda} + b\frac{sh\lambda(T-t)}{\lambda})\widetilde{\varphi_2}(s)\Bigg), \quad \text{при} |s|^2 + k \geq 0 \tag{6}$$

Якщо $|s|^2 + k < 0$ то розв'язок має вигляд

$$\widetilde{u}(s,t) = \frac{1}{1 + b^2 + 2b \cdot \cos T\sqrt{-|s|^2 - k}} \cdot \Big(\cos t\sqrt{-|s|^2 - k} + \\ + b\cos(T-t)\sqrt{-|s|^2 - k}\Big)\widetilde{\varphi}_1(s) + \\ + \Big(\sin t\sqrt{-|s|^2 - k} + b\sin(T-t)\sqrt{-|s|^2 - k}\Big) \cdot \frac{\widetilde{\varphi}_2(s)}{\sqrt{-|s|^2 - k}} \tag{7}$$

Таким чином розв'язок належить простору S, якщо $\varphi_1(s)$ і $\varphi_2(s)$ належать цьому простору.

Крім того, оскільки, при великих s, $\widetilde{u}(s,t)$ має вигляд (6) і виконується нерівніть $\widetilde{u}(s,t) \leq C\exp(-\rho(t)|s|)$, то $u(x,t)$ – нескінченно диференційовна, якщо $\varphi_1(s)$ і $\varphi_2(s)$ належать простору $L_2(\mathbb{R}^n)$, тобто ця крайова задача параболічна.

6. Диференціальні рівняння з однією просторовою змінною

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) = 0. \tag{8}$$

З'ясуємо, при яких умовах на $P(s)$ і $Q(s)$ існують параболічні крайові задачі

1. Нехай $P(s) = 0$, а $Q(s) = b_0 s^{2k} + b_1 s^{2k-1} + \ldots + b_{2k}$ з $b_0 < 0$

   Тоді корені характеристичного рівняння

$$\lambda_j(s) = \pm\sqrt{-b_0 s^{2k} - b_1 s^{2k-1} - \ldots - b_{2k}} \sim \pm\sqrt{b_0}|s|^k, \quad \text{при } s \to \infty$$

і виконана умова Наслідку 4, тобто крайова задача з умовами

$$\begin{cases} u(x,0) + bu(x,T) = \varphi_1(x) \\ \\ u'_t(x,0) + bu'_t(x,T) = \varphi_2(x) \end{cases} \tag{9}$$

буде параболічна з деяким додатним b.

2. Якщо $Q(s) = b_0 s^{2k} + b_1 s^{2k-1} + \ldots + b_{2k}$ з $b_0 < 0$, а степень полінома $P(s)$ менше k, то

$$\lambda_j(s) = \frac{1}{2}\left(-P(s) \pm \sqrt{P(s)^2 - 4Q(s)}\right) \sim \pm\sqrt{b_0}|s|^k, \quad \text{при } s \to \infty$$

і теж виконані умови Наслідку 4, тобто крайова задача з умовами (9) буде параболічною.

3. Якщо $P(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \ldots + a_m, \quad$ з $a_0 \in \mathbb{R}$,
а $D(s) = P(s)^2 - 4Q(s) = c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \ldots + c_{2m}$ з додатним $c_0 \neq a_0^2$, тоді $\lambda_j(s) = \dfrac{1}{2}\left(-P(s) \pm \sqrt{P(s)^2 - 4Q(s)}\right)$.
При таких умовах $\min\limits_j |Re\lambda_j(s)| \sim \dfrac{1}{2}|\sqrt{c_0} - |a_0|| \cdot |s|^m$ при $s \to \infty$, і теж виконані умови Наслідку 4, тобто існує параболічна крайова задача.

Приклад 5

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \left(a_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2\right) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} = 0$$

$$P(s) = -a_0 s^2 - ia_1 s + a_2, \quad Q(s) = -s^4$$

При $a_0 \neq \pm 1$, виконані умови пункту 3 і тому існує параболічна крайова задача з умовами (9) з деяким додатним b.

Висновки

В дипломній роботі досліджуються випадки систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, для яких існує коректна двоточкова крайова задача в просторі Л. Шварца, а також з'ясовується, при яких додаткових умовах на власні значення матриці $P(S)$ ця задача буде параболічною, тобто збільшується гладкість розв'язків.

Доведено що, якщо власні значення матриці системи зростають степеневим чином, то тоді існують параболічні крайові задачі.

Аналогічні результати вірні також для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку за часом. Показано також, що існує параболічна крайова задача для рівняння Гельмгольця.

Докладно розглянутий випадок рівнянь другого порядку за часом з однією просторовою змінною, і вказані умови, при яких існує параболічна крайова задача.

Список використаних джерел

[1] Пташник Б. Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / [Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.] - К.: Наук. думка, 2002 - 416 с.

[2] Левкін Д.А., Макаров О.А, Завгородній О.І., Левкін А.В. Теоретичні дослідження багатоточкових крайових задач // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки, 2020. - Том 31 (70), №3. – С. 126–130.

[3] Borok V. M. On correct solvability of a boundary value problem in an infinite slab for linear equations with constant coefficients/Mathematics of the USSR-Izvestiya, 1971, Volume 5, Issue 4, Pages 935–953

[4] Фардигола Л. В. Нелокальні двоточкові крайові задачі в шарі з диференціальними операторами в крайовій умові / Укр.мат. журнал 1995, т.47, №8, с.1122-1128

[5] Makarov O. A. The existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudo-differential equations, Differential Equations, 1994. – V.30, No. 1. – P. 144-150.

[6] Makarov A.A. Parabolic boundary value problems for systems of pseudo differential equations in an infinite layer, Differential Equations, 1996. – V.32, No. 5. – P. 636–642.

[7] Макаров О.А. Критерій коректної розв'язності крайової задачі в шарі для систем лінійних рівнянь в згортках в топологічних просторах.

Теоретичні і практичні питання диференціальних рівнянь і алгебри. Збірник наукових праць, Київ, Наукова думка, 1978, с.178-180

[8] Hermander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operator II. / Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo. 1983

[9] Makarov A., Chernikova A. Existence of well-posedness value problem for the Helmholtz equation/ DECT2023 Book of abstracts p.24